ステファン問題の数値解析 (数値解析とコンピューター)

AUTHOR(S):
河原田, 秀夫; 名取, 亮

数理解析研究所講究録
253巻 1975年 14-23

ステファン問題の数値解析

東大 工　河原田秀夫
電通大　名取 亮

§1. 序

熱方程式に対する自由境界問題の代表的な例であるステファン問題の数値解法を提案し，数値解の一意存在とその収束を証明する。§2で，微積分方程式系とそれを差分化した方程式を示し，§3では，その差分方程式系の解を求めるアルゴリズムを与える。§4で，差分解の一意存在，§5で微積分方程式の解への収束を証明する。

§2. 問題

我々の問題は，以下の微積分方程式系を満す自由境界 $x=s(t)$ および温度分布 $u(x,t)$ を求めることである。

(2.1a)　$u_t = u_{xx}$,　$0 \le x \le s(t)$, $0 \le t$

(2.1b)　$u(0,t) = f(t) \ge 0$

(2.1c)　$u(x,0) = \varphi(x)$, $0 \le x \le b$, $0 \le \varphi(x) \le D(b-x)$

(2.1d)　$u(s(t),t) = 0$

(2.1e) $\quad (s(t))^2 = F(t) - 2\int_0^{s(t)} \xi\, u(\xi, t)\, d\xi$

ただし，

(2.1f) $\quad F(t) = b^2 + 2\int_0^t f(\tau)d\tau + 2\int_0^b \xi\,\varphi(\xi)d\xi\ , \quad b > 0$

ここで，$0 \le t \le T$ で考えることにし，$F(T) \le X$ となるXを選んで，処罰法を用いることにする。 t方向のキザミをΔt，x方向のキザミをΔxとし，$\lambda = \Delta t/(\Delta x)^2 \le \frac{1}{2}$ とする。 $X = M\Delta x$，$T = N\Delta t$ である。 格子点上で定義される関数を右肩にΔをつけて表わすことにする。

次のような差分演算子を定義する。

$$D_{\bar t}\, u^\Delta(x,t) = (u^\Delta(x,t) - u^\Delta(x, t-\Delta t))/\Delta t$$

$$D_{\bar x}\, u^\Delta(x,t) = (u^\Delta(x,t) - u^\Delta(x-\Delta x, t))/\Delta x$$

$$D_x\, u^\Delta(x,t) = (u^\Delta(x+\Delta x, t) - u^\Delta(x,t))/\Delta x$$

$$D_{x\bar x}\, u^\Delta(x,t) = D_x D_{\bar x}\, u^\Delta(x,t)$$

そうすると，以下のような差分ステファン問題が得られる。

(2.2a) $\quad D_{\bar t}\, u^\Delta(x,t) = D_{x\bar x}\, u^\Delta(x, t-\Delta t) - K\chi^\Delta(x,t)\, u^\Delta(x,t)$

(2.2b) $\quad u^\Delta(0,t) = f^\Delta(t)$

(2.2c) $\quad u^\Delta(x,0) = \varphi^\Delta(x)$

(2.2d) $\quad u^\Delta(X,t) = 0$

(2.2e) $\quad s^\Delta(n\Delta t) = \sqrt{F^\Delta(n\Delta t) - 2\sum_{m=1}^{M-1} (m\Delta x)\, u^\Delta(m\Delta x, n\Delta t)\Delta x}$

ただし，

(2.2f) $\quad F^\Delta(n\Delta t) = b^2 + 2\sum_{i=0}^{n-1} f^\Delta(i\Delta t)\Delta t + 2\sum_{m=1}^{[b/\Delta x]} (m\Delta x)\varphi^\Delta(m\Delta x)\Delta x$

$$(2.2g)\qquad \chi^{\Delta}(m\Delta x, n\Delta t) = \begin{cases} 0 & , 1 \le m \le \sigma(n) - 1 \\ \dfrac{1-\rho(n)}{1+\rho(n)K\Delta t} & , m = \sigma(n) \\ 1 & , \sigma(n)+1 \le m \le M \end{cases}$$

ここで，

$$\sigma(n) = [\, S^{\Delta}(n\Delta t)/\Delta x \,]$$

$$\rho(n) = S^{\Delta}(n\Delta t)/\Delta x - \sigma(n)$$

である。

§3. アルゴリズム

差分方程式系（2.2）の解は，次のような反復法を用いて求める。すなわち，S^{Δ} の才0近似を

$$S_0^{\Delta}(n\Delta t) = \sqrt{F^{\Delta}(n\Delta t)}$$

とし，それに対して定まる χ^{Δ} を用いて差分熱方程式を解いて u_0^{Δ} を求める。それを（2.2e）に代入して S^{Δ} の才1近似をきめる。以下同様にして，

$$S_{\ell}^{\Delta}(n\Delta t) = \sqrt{F^{\Delta}(n\Delta t) - 2\sum_{m=1}^{M-1}(m\Delta x)\, u_{\ell-1}^{\Delta}(m\Delta x, n\Delta t)\,\Delta x}$$

とし，それに対応する解を $u_{\ell}^{\Delta}(x,t)$ とする。

§4. 差分解の一意存在

定理4.1　$0 < \lambda \le \frac{1}{2}$

$K = 1/(\Delta t)^2$

$0 < C_1 < 1$

ただし，

$$C_1 = \frac{X}{b}(A + C\lambda\Delta x)\Delta x$$

$$C = \max(\max_t f(t),\ \max_x \varphi(x))$$

$$A = \max(C/b,\ D)$$

のとき，S_ℓ^Δ，u_ℓ^Δ は $\ell \to \infty$ のとき（2.2）の一意解に収束する。

証明.

1°. 任意の ℓ に対して，$S_\ell^\Delta(n\Delta t)$ は

(4.1) $\quad b \leq S_\ell^\Delta(0) \leq S_\ell^\Delta(\Delta t) \leq \cdots \leq S_\ell^\Delta(N\Delta t) \leq X$

を満す。

2°. 任意の n に対して，

(4.2) $$\left| S_{\ell+1}^\Delta(n\Delta t) - S_\ell^\Delta(n\Delta t) \right| \leq C_1 \left| S_\ell^\Delta(n\Delta t) - S_{\ell-1}^\Delta(n\Delta t) \right| + C_2 \sum_{i=1}^{n-1} \left| S_\ell^\Delta(i\Delta t) - S_{\ell-1}^\Delta(i\Delta t) \right|$$

が成立つ。ただし，

$$C_2 = \frac{X^2}{2b}(A + C\lambda\Delta x)$$

である。

3°. $\quad \left| S_{\ell+1}^\Delta(n\Delta t) - S_\ell^\Delta(n\Delta t) \right| = Q^{(n)}(\ell)\, C_1^\ell$

とおくと，(4.2) 式は.

(4.3) $$Q^{(n)}(\ell) \leqq Q^{(n)}(\ell-1) + \frac{C_2}{C_1}\sum_{i=1}^{n-1} Q^{(i)}(\ell-1)$$

となる。任意の n に対して，

(4.4) $\quad Q^{(n)}(0) = \left| S_n^{(1)} - S_n^{(0)} \right| \leqq X - b$

であることを用いると，一般に

$$(4.5)\quad Q^{(n)}(\ell) \leq (X-b)\sum_{p=0}^{n-1}\left(\frac{C_2}{C_1}\right)^p \binom{n-1}{p}\binom{\ell}{p}$$

となることがわかる。 すなわち，$Q^{(n)}(\ell)$ は ℓ に関する $(n-1)$ 次多項式で評価される。 従って，(4.2) 式から

$$(4.6)\quad \max_{0\leq n\leq N}\left|S_{\ell+1}^{\Delta}(n\Delta t)-S_{\ell}^{\Delta}(n\Delta t)\right| \leq \left[\max_{0\leq n\leq N} Q^{(n)}(\ell)\right] C_1^{\ell} \leq O(\ell^{N-1})\,C_1^{\ell}$$

となり，仮定により $0<C_1<1$ であるから，$\ell\to\infty$ とすれば上式の右辺は 0 に収束する。

§5. 微積分方程式の解への収束

$\lambda=\Delta t/(\Delta x)^2$，$K=1/(\Delta t)^2$ であるから，$\Delta x\to 0$ とすれば，$\Delta t\to 0$，$K\to\infty$ となる。 ここでは，$\Delta x\to 0$ としたとき，§4 で求めた解 $\{S^{\Delta}(t),\,u^{\Delta}(x,t)\}$ の収束を議論する。

5.1 $S^{\Delta}(t)$ の収束

いま，$S^{\Delta}(t)$ を線形補間したものを $\hat{S}(t)$ と書く。このとき，次の定理を得る。

定理 5.1 $\Delta x^{(j)}\to 0\ (j\to\infty)$ となるような適当な列をとれば，それに対応する $\hat{S}_j(t)$ は一様収束し，極限関数 $S(t)$ は，

$$0 \leq \frac{S(t')-S(t)}{t'-t} \leq C_6$$

なるリプシッツ条件を満す。

この定理を証明する前に，いくつかの定義を述べる。

$s^\Delta(t)$ が与えられたときに，$\chi^\Delta(\sigma(n)\Delta x, n\Delta t)$ の値を 1 としたときの解を $W^\Delta(x,t)$，0 としたときの解を $V^\Delta(x,t)$ と定義する。このとき，明らかに

$$W^\Delta(x,t) \leqq u^\Delta(x,t) \leqq V^\Delta(x,t)$$

が成り立つ。

定理 5.1 の証明

1°
$$\max_{\substack{1\leqq m\leqq \sigma(n)+1\\ 1\leqq n\leqq N}} \left| D_{\bar{x}} V^\Delta(m\Delta x, n\Delta t)\right| \leqq C_3 \tag{5.1}$$

$$\max_{\substack{1\leqq m\leqq \sigma(n)\\ 1\leqq n\leqq N}} \left| D_{\bar{x}} W^\Delta(m\Delta x, n\Delta t)\right| \leqq C_4 \tag{5.2}$$

なる評価が成り立つ。

2° (5.1) と (5.2) から，$u^\Delta(x,t)$ に対しては，

$$\max_{\substack{1\leqq m\leqq \sigma(n)+1\\ 1\leqq n\leqq N}} \left| D_{\bar{x}} u^\Delta(m\Delta x, n\Delta t)\right| \leqq \max(C_3, C_4) + \frac{A\Delta x + C\Delta t}{\Delta x} \leqq C_5 \tag{5.3}$$

が成り立つ。

3° (5.3) を用いれば，$\hat{s}(t)$ に対しては，

$$D_{\bar{t}}\{\hat{s}(t)\}^2 \leqq \sigma(n)\Delta x \left| D_{\bar{x}} u^\Delta(\sigma(n)\Delta x, t)\right| + C X^2 \leqq C_6 \tag{5.4}$$

が成り立つ。

4° $\Delta x^{(j)}$ から適当な部分列 $\Delta x^{(j')}$ をとれば，Ascoli-Arzela の定理から，$\hat{s}_{j'}(t)$ は一様収束し，極限関数 $s(t)$ は，

$$0 < \frac{s(t') - s(t)}{t' - t} \leqq C_6$$

なるリプシッツ条件をみたす。

5.2　$u^{\Delta}(x,t)$ の収束

$u^{\Delta}(x,t)$ を階段関数で補間したものを $\hat{u}(x,t)$ と書く。このとき，次の定理を得る。

定理 5.2　　$\Delta x^{(j)} \to 0$ $(j \to \infty)$ のとき，$\hat{u}(x,t)$ は一様収束し，その極限関数 $u(x,t)$ は (2.1) の解であり，定理 5.1 で得られた $x = s(t)$ は求める自由境界である。

定理を証明する前に，いくつかの定義を与える。

境界値問題

$$(5.5) \begin{cases} u_t = u_{xx} & , 0 \leq x \leq s(t),\ 0 \leq t \leq T \\ u(0,t) = f(t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(s(t),t) = 0 \end{cases}$$

を差分化し，t に関して前進差分を用いて解いたものを，$u_f^{\Delta}(x,t)$，後退差分を用いて解いたものを $u_b^{\Delta}(x,t)$ と書く。$u_f^{\Delta}(x,t)$，$u_b^{\Delta}(x,t)$ を階段関数で補間したものを，それぞれ $\hat{u}_f(x,t)$，$\hat{u}_b(x,t)$ と書く。

$\Delta x^{(j)} \to 0$ のとき，$\hat{u}_b$ は (5.5) の古典的解 u_b に一様収束することが知られている。また，$\hat{u}_f$ は (5.5) の弱解に

一様収束することが証明できる。

定理5.2の証明

1° $\hat{u}(x,t)$ は $u_f(x,t)$ に一様収束する。

実際，

$$\max_{\substack{0\leq x\leq s(t)\\ 0\leq t\leq T}} \left| \hat{u}(x,t) - \hat{u}_f(x,t) \right| \leqq A \max_{0\leq t\leq T} \left| \hat{s}(t) - s(t) \right| + A\Delta x + C\Delta t$$

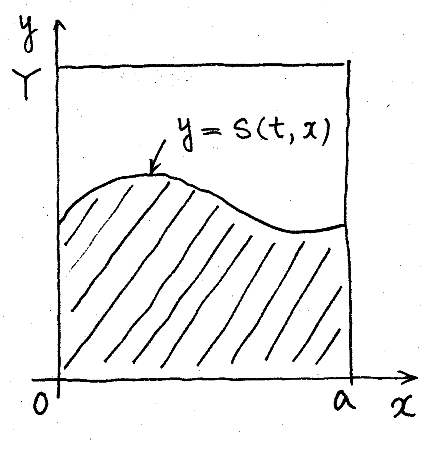
が成り立つ。

2° (5.5) の弱解 $u_f(x,t)$ は，古典的解 $u_b(x,t)$ とほとんど到る所一致する。

3° (2.2e) で $\Delta x^{(j)} \to 0$ とすれば，定理5.1と上記の2°を考慮して (2.1e) を得る。

§6. 2次元ステファン問題

図のような帯状領域内におけるステファン問題を考えよう。



求める自由境界と温度分布を，$y = s(t, x)$，$u = u(t, x, y)$ とすれば，次のような方程式系が成立する。

(6.1) $\quad u_t = u_{xx} + u_{yy} \,,\quad 0<x<a\,,\ 0<y<s(t,x)\,,\ 0<t$

(6.2) $\quad u_y(t, x, 0) = f(t, x) \,,\quad 0<x<a\,,\ 0<t$

(6.3) $\quad u_x(t, 0, y) = 0 \,,\quad 0<y<s(t,0)\,,\ 0<t$

(6.4) $\quad u_x(t, a, y) = 0 \,,\quad 0<y<s(t,a)\,,\ 0<t$

(6.5) $\quad u(0, x, y) = \varphi(x, y) \,,\quad 0<x<a\,,\ 0<y<b(x)$

(6.6) $\quad u(t, x, s(t,x)) = 0 \,,\quad 0<x<a\,,\ 0<t$

(6.7) $\quad s_t(t,x) = u_x(t,x,s(t,x))\,s_x(t,x) - u_y(t,x,s(t,x))$

$\qquad\qquad 0<x<a\,,\ 0<t$

(6.8) $\quad s(0, x) = b(x) \,,\quad 0<x<a$

ステファン条件 (6.7)(6.8) は，次のように変形される。

(6.9) $$s(t,x) = b(x) + \int_0^{b(x)} \varphi(x,\eta)\,d\eta - \int_0^t f(\tau,x)\,d\tau$$
$$- \int_0^{s(t,x)} u(t,x,\eta)\,d\eta + \int_0^t d\tau \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^{s(\tau,x)} u(\tau,x,\eta)\,d\eta$$

1次元のときと同様に，処罰法を用いて数値的に解くことを考える。 十分大きい正数 Y と K を選んで，(6.1)を

(6.10) $\quad u_t = u_{xx} + u_{yy} - K\chi(t,x,y)\,u$,

(6.6)を

(6.11) $\quad u(t,x,Y) = 0$

に変える。 ただし，

$$\chi(t,x,y) = \begin{cases} 0 , & 0<y<s(t,x) \\ 1 , & s(t,x)<y<Y \end{cases} \qquad (0<x<a,\ 0<t)$$

である。

(6.9)式で積分の上限の $s(t,x)$ を Y でおきかえれば，

(6.12) $\quad s(t,x) = b(x) + \int_0^t d\tau \int_0^Y K\chi(t,x,\eta)\,u(t,x,\eta)\,d\eta$

となる。

初期，境界条件のもとで，(6.10)と(6.12)を連立させて，1次元のときと同様に反復法を用いて解けばよい。